非有界作用素の正規拡大について(作用素の構造に関する作用素論の最近の話題)

太田, 昇一

数理解析研究所講究録
979 巻 1997 年 120-123

非有界作用素の正規拡大について

九州芸工大 太田昇一 (Schôichi Ôta)

1. 非有界な作用素の正規拡大については、微分作用素の研究から、Kilpi (1953年) や Davis (1955年) が同じ空間上への正規拡大について考察している。Coddington (1960年前後) も同じ立場から、Neumann の対称作用素の自己共役拡大の方法を用いて、同じ空間への拡張問題を考えている。一方、Bargmann は creation operator $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{d}{dx})$ in $L^2(\mathbb{R})$ が、空間の外への正規拡大をもつことを示した (1961年)。近年では、非有界な Toeplitz 作用素や非有界な weighted shift に関連して、非有界な正規拡大問題が研究されている。

2. T をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上稠密な定義域を持つ線形作用素とする。このとき、

(1) T が formally normal $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T^*)$

$$\|Tx\|=\|T^*x\| \quad (x\in\mathcal{D}(T));$$

(2) T が normal $\Longleftrightarrow$ T が formally normal で $\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(T^*)$;

(3) T が subnormal $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}$ を閉部分空間として含む適当なヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ と、$\mathcal{K}$ 上の normal な作用素 N が存在

して、

⊛…… $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H}$,

かつ、 $T\eta = N\eta \quad (\eta \in \mathcal{D}(T))$ を満たす：

のように定義する。

この定義に関連して、Mcdonald and Sundberg (1986年) は、subnormal の定義において、⊛ではなくもっと強い条件：

$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H}$ ………… ⊛⊛

のもとで、有界作用素における Putnam の結果を非有界 subnormal に拡張している。(注：⊛⊛を満たす subnormal は必ず closed)

1940年代に、Naimark は対称作用素の拡大問題（空間の外への拡大も含めて）を第1種、2種、3種に分類して論じている。閉対称作用素は、⊛⊛を満たすような自己共役拡大を必ずもつ (i.e., Naimark の言葉で言うと、第2種の拡大をもつ)。それでは、「一般に closed な subnormal 作用素は、第2種の拡大をもつのか？」と言う問 (Stochel and Szafraniec (1989)) が自然に出るが、「第2種の normal 拡大を持たない closed subnormal 作用素が存在する」ことは、講究録 (903巻, pp.138-141) で述べた。この例は、一方で、同じ空間上への unique な normal 拡大をもつが、それ自身 normal でない closed 作用素になっている。closed 対称作用素が unique な自己共役拡大を同じ空間にもてば、それ自身が自己共役になっていることに注意しておく。

3. 作用素Tに対して、$T=T_1+iT_2$ ただし、T_1, T_2 は対称作用素で $\mathcal{D}(T_1)=\mathcal{D}(T_2)$ をTのCartesian分解という。自己共役作用素A, Bに対して、AとBのそれぞれのspectral projectionが互いに可換な時、AとBは強可換と言い、$A \backsim B$ と書くことにする。

<u>定理1</u> formally normal作用素 $T=T_1+iT_2$ (Cartesian分解) において、T_1 と T_2 は essentially 自己共役とする。このとき、次は同値：

1. Tがsubnormal；
2. $\overline{T_1} \backsim \overline{T_2}$ ；
3. Tが同じ空間上への一意的なnormal拡大をもつ．

上のとき，一意的なnormal拡大は $\overline{T_1}+i\overline{T_2}$ で与えられる。

第2種のnormal拡大を持たないsubnormal作用素は、上の形で、$\overline{T_1+iT_2} \subsetneq \overline{T_1}+i\overline{T_2}$ の例でもある。

ここで、等号が成り立つ場合の特徴づけは、次で与えられる。

<u>命題2</u> 定理1の仮定のもとに、Tがsubnormalとすると、$\overline{T}=\overline{T_1}+i\overline{T_2}$ なるための必要十分条件は、

$$C^s(T_2)'\mathcal{D}(\overline{T}) \subset \mathcal{D}(\overline{T})$$

$$(\Leftrightarrow C^s(T_1)'\mathcal{D}(\overline{T}) \subset \mathcal{D}(\overline{T}))$$

である。ここに $C^s(T_2)=\{B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\,;\ BT\subset TB\}$, で

$C^s(T_2)'$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ における $C^s(T_2)$ の通常の可換子である。

4. 同じ空間への unique な normal 拡大をもつ作用素を考える際、定理1で特に T_2 が有界な場合を最初に考えてみる。すなわち、$T = A + Bi$ $(A \subsetneq A^*,\ B = B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ において、

<u>補題3</u>. T が $\mathcal{H}$ へ normal 拡大をもつならば、$B \in C^w(A)$.
ここに $C^w(A) = \{ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XA \subset A^*X \}$.
(注: $B \in C^w(A)$ でも $A + Bi$ は一般に normal 拡大を持たない例は存在する).

<u>命題4</u> $B \in C^w(A)$ かつ B が cyclic ベクトルをもつならば、T は $\mathcal{H}$ 上 unique な normal 拡大をもつ。

もっと一般に、次の定理が成り立つ:

<u>定理5</u>. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密な定義域をもつ作用素 T が $\mathcal{H}$ に normal 拡大 N をもち、その imaginary part $\mathrm{Im}\,N$ の closure B_0 が simple spectrum を持つならば、T は $\mathcal{H}$ 上 unique な normal 拡大 $A_0 + iB_0$ をもつ:

ただし、 $\mathcal{D}(A_0) \equiv \{ \sum A_i \xi_i : A_i \in C^s(B_0)',\ \xi_i \in \mathcal{D}(A) \}$

$$A_0\left(\sum A_i \xi_i\right) \equiv \sum A_i A \xi_i$$
。